Laurent Prost

TIPE :

Un exemple de mesure de distance dans l'espace :

Le Laser Lune

Table des matières

1 Introduction

Nous nous proposons dans ce TIPE d'examiner quelques aspects du Laser Lune, qui est à l'heure actuelle le moyen le plus précis de mesure de la distance Terre-Lune, permettant d'atteindre une précision de quelques millimètres sur la mesure. Il va de soi que lorsque l'on atteint une telle précision sur une distance aussi grande, le moindre effet est à prendre en compte. Notre but ne sera pas ici de détailler tous les facteurs pris en compte en réalité, ni même de présenter les méthodes utilisées, mais plutôt d'essayer d'évaluer l'influence relative des paramètres les plus importants rentrant en jeu dans cette mesure de haute précision.

2 Présentation, position du problème

2.1 Le principe de mesure

Le principe du Laser Lune est très simple *(cf fig. 1)* : un tir laser est effectué depuis une station basée sur Terre, en direction de réflecteurs posés sur la Lune. La mesure du temps de retour permet de remonter à la connaissance de la distance.

La station de tir est située en France, à l'Observatoire de la Côte d'Azur, situé à Grasse. Elle se compose d'un laser YAG d'une puissance de 2 GW, qui peut effectuer des tirs d'une durée de 300 ps. Nativement, il émet dans l'infrarouge, à 1064 nm, et est couplé à un doubleur de fréquence (de rendement 50 %), ce qui permet d'émettre dans le vert à 532 nm ; ceci car le vert est la seule couleur pour laquelle l'on dispose de photodiodes suffisament sensibles pour détecter un rayon en retour. Le tout est placé derrière un télescope de 1.54 m de diamètre et de grossissement 125x, qui a pour rôle d'assurer un pointé précis, et de diminuer encore plus la divergence naturelle du laser (80"). Le rayon lumineux émis est donc un cône dont l'angle au sommet est de seulement 0.64".

Les réflecteurs ont été quant à eux déposés par les missions russes Lunakhod 1 et 2 et par les missions américaines Apollo XI, XIV et XV *(cf fig. 2)*. Ces réflecteurs dits en "coin de cube" *(cf fig. 3)* ont pour propriété de renvoyer la lumière exactement dans la direction incidente. En effet, l'image d'un objet de coordonnées (x,y,z) est (-x,y,z) par le miroir 1, puis (-x,-y,z) par le miroir 2, puis (-x,-y,-z) par le miroir 3. L'objet est donc exactement conjugué avec son symétrique par rapport au sommet du cube.

2.2 L'atténuation du faisceau laser

Malgré la très faible ouverture du faisceau laser ($\alpha = 0.64"$), celui-ci n'est pas ponctuel. En prenant D $\approx 3 \times 10^6$ km (il n'est pas important de prendre ici une valeur très précise, nous cherchons juste à avoir une approximation), le rayon laser crée sur la Lune une tâche lumineuse *(cf fig. 4)* de rayon :

$$R = D \times \tan(\alpha) \approx 1.2km$$

Le plus grand des réflecteurs est celui d'Apollo 15, composé de 400 coins de cube de 4 cm de côté, ce qui représente une surface $\sigma \approx 6400$ cm^2. En notant E_i l'énergie émise par le laser, et E_r l'énergie reçue par les réflecteurs, la portion d'énergie reçue par un réflecteur est :

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sigma}{\pi R^2} \approx 0,14 \times 10^{-2}$$

Le faisceau laser repartant est diffracté, et en assimilant ce phénomène à la diffraction par une fente carrée de côté a $\approx$ 80 cm, on a en retour sur Terre une tâche de rayon $\frac{\lambda D}{a}$ (résultat classique d'optique ondulatoire). Le télescope ayant un rayon r = 0.75 m, on a donc la portion d'énergie finalement récupérée :

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{\pi r^2}{\pi \left(\frac{\lambda D}{a}\right)^2} \times \frac{E_r}{E_i} \approx 2 \times 10^{-19}$$

2.3 La durée des tirs

Le fait que les tirs aient un étalement temporel introduit une incertitude sur la mesure : on ne sait pas si les photons captés en retour proviennent du début ou de la fin du tir. On a donc une incertitude brute sur la distance mesurée égale à la distance parcourue par la lumière le temps d'un tir (c'est en fait la "longueur" du faisceau laser) :

$$\Delta d = \Delta t \times c$$

Pour un tir d'une durée $\Delta t = 300$ ps, on a donc une incertitude brute de 9 cm. On améliore en faisant des moyennes sur des tirs répétés.

Cependant, malgré la très forte puissance du laser, les tirs sont très peu énergétiques :
- Le laser émet dans le vert à $\lambda = 532$ nm et un photon possède une énergie $E_p = h\nu = hc/\lambda \approx 4 \times 10^{-19}$ J
- La puissance effective du laser étant P = 1 GW (on rappelle que le doubleur de fréquence n'a qu'un rendement de 50 %), l'énergie contenue dans un tir est $E_t = P \times \Delta t \approx 200$ mJ

Il y a donc $n = E_t/E_p \approx 5 \times 10^{17}$ photons dans un tir. On constate que dans les conditions actuelles de fonctionnement, il revient moins un photon tous les 100 tirs ! Ceci oblige à faire de nombreux tirs pour obtenir un retour : typiquement, sur une séance de tirs de 10 minutes (soit 6000 tirs, à raison de 10 tirs par seconde), seule une centaine de tirs voit un photon revenir sur le téléscope.

2.4 Le filtrage des résultats

Nous avons donc vu que pour effectuer une mesure, il ne faut pas compter sur plus d'un photon ! Il se pose alors naturellement ce problème : comment repérer ce photon parmi la masse de photons en provenance de la Lune ? Ceci est assuré par un triple filtrage :

- On effectue un premier filtrage spatial, en ne visant que la zone d'où les photons sont susceptibles de venir, à l'aide d'un diaphragme de 7 secondes d'arc.
- Il y a ensuite un filtrage spectral, à l'aide un interféromètre de Fabry-Pérot de largeur spectrale 1.2 Ådont les pics sont éloignés de 60 Å, auquel on rajoute un filtre permettant de sélectionner très précisément le pic correspondant à la longueur d'onde du laser.
- On utilise pour la détection une photodiode dite "à avalanche", ultra sensible et de très grand gain (elle délivre une impulsion de plusieurs volts pour un seul photon !). Le dernier filtrage est alors temporel : cette photodiode n'est sensibilisée que pendant une durée très courte (50 ps) autour de la date de retour attendue pour le photon.

Ceci permet d'assurer avec une bonne certitude que lorsqu'un photon est détecté, il s'agit bien d'un photon provenant du laser. Le tout est daté par une horloge atomique, qui assure une datation des différents événements (date du tir, date du retour) avec une précision de 7 ps.

Voici donc présentés les principaux aspects purement techniques, relatifs à la mesure du temps de retour du rayon. Cependant, le travail ne s'arrête pas là : la connaissance du temps d'aller-retour ne permet pas de remonter directement à la connaissance de la distance Terre-Lune. Un calcul naïf considérerait que le rayon laser suit une trajectoire rectiligne qu'il parcourt à vitesse constante, égale à la vitesse de la lumière, ce qui n'est bien entendu pas le cas en réalité. Nous allons donc essayer d'estimer l'impact des principaux effets perturbateurs sur la précision de la mesure.

3 Prise en compte d'effets perturbateurs

3.1 L'influence de l'atmosphère

L'observation étant faite depuis un observatoire situé sur Terre, le rayon doit traverser toute l'atmosphère dans les deux sens afin d'arriver à son but, ce qui modifie à la fois sa trajectoire et sa vitesse. Nous choisirons pour cela de modéliser l'atmosphère par un milieu d'indice optique n(z) variant de manière continue avec l'altitude. Cherchons dans un premier temps à établir l'équation de la trajectoire du photon :

Les relations de Descartes nous donnent $n(z) \times \sin i(z) = n(z + dz) \times \sin i(z + dz)$, d'où :

$$\frac{d}{dz}\left(n(z) \times \sin i(z)\right) = 0$$

De plus, comme l'on considère des angles aigus :

$$\frac{dx}{dz} = \tan i(z) = \frac{\sin i(z)}{\sqrt{1 - \sin^2 i(z)}}$$

Connaissant i_0 l'angle d'incidence au sol, il nous suffit donc de déterminer l'évolution de l'indice de réfraction en fonction de l'altitude pour déterminer la trajectoire. Nous utiliserons pour cela la loi de Gladstone :

$$n(z) = k \times \rho(z) + 1$$

Où k est une constante dépendant du gaz considéré, et ρ la masse volumique du gaz. k est obtenu à partir de mesures au sol et il nous reste donc à choisir une loi de décroissance pour rho.

On choisit donc de modéliser en première approximation ρ par une fonction décroissant de manière exponentielle avec l'altitude :

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right)$$

On considère que l'atmosphère est épaisse d'environ 100 km, ce qui nous amène à choisir une épaisseur caractéristique $\delta = 20$ km. On a donc la longueur l de la courbe décrite par le photon dans l'atmosphère :

$$l = \int \sqrt{dx^2 + dz^2} = \int_0^{100} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz$$

Ce qui est à comparer à la valeur sans perturbation l_0 :

$$l_0 = \sqrt{100^2 + (100 \times \tan i_0)^2}$$

Cependant, Maple refusant de calculer cette intégrale, il m'a fallu me tourner vers un autre modèle qui serait de toute manière plus en adéquation avec la réalité. Il existe de nombreux modèles d'atmosphère standard, et parmi ceux-ci une référence est le modèle "U.S. Standard Atmosphere", qui donne entre autres des valeurs numériques pour la pression, la température et la masse volumique à diverses altitudes données. On remarque en observant ces données que si la température suit une évolution assez mouvementée en fonction de l'altitude, la pression et la masse volumique décroissent quant à elles de manière régulière, en adéquation avec notre premier modèle exponentiel. Pour avoir des intégrales calculables, on considère que les évolutions se font de manière linéaire entre les différents paliers donnés par le modèle.

Cependant, l'atmosphère ne fait pas que déformer le parcours, elle dimine aussi la vitesse du rayon, ce qui doit également être pris en compte. Pour avoir une idée de l'erreur commise par le modèle naïf, il nous faut donc comparer la distance qu'il donne avec celle que l'on obtient avec notre modèle.

On a la situation décrite par le schéma de la figure 5, sur laquelle on cherche à connaître d. On a :

$$d = \sqrt{(x_1 + d_1 \sin i_{eff})^2 + (z + d_1 \cos i_{eff})^2}$$

On peut connaître i_{eff} facilement grâce à $n_0 \sin i_0 = \sin i_{eff}$ (où n_0 est l'indice de l'air au sol, et i_0 l'angle de tir). Connaissant t, on connaît également d_1 grâce à la relation suivante :

$$t = 2 \times \left[c \times d_1 + \int_0^{100} \frac{n(z)}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz \right]$$

Finalement, x_1 est donné par :

$$x_1 = \int_0^{100} \frac{dx}{dz} dz$$

Après applications numériques, pour un angle d'incidence au sol de 50 degrés, on trouve que la correction à faire est de l'ordre de 50 mètres.

3.2 La déviation du faisceau par la gravitation

Nous avons fait dans la partie précédente l'hypothèse que le rayon, une fois sorti de l'atmosphère, se propageait de manière rectiligne. Ceci n'est malheureusement pas vrai, du fait d'un effet relativiste : bien que les photons soient de masse nulle, la gravitation influe malgré tout sur leur trajectoire ! La Terre, la Lune et le Soleil sont des astres suffisament massifs pour dévier de manière significative la trajectoire de notre faisceau laser. Pour simplifier l'étude, nous nous limiterons à la déviation d'un photon plongé dans le champ gravitationnel de la Terre seule.

Nous considérons la situation décrite par la figure 6. Une fois de plus, il s'agit d'obtenir un ordre de grandeur de la perturbation, nous effectuerons donc les approxmiations suivantes : La Terre est assimilée à un point matériel de masse M_T, immobile, placé à l'origine du repère. Le photon est assimilé à un point matériel P de masse nulle, mais de moment cinétique $\vec{L}$ non nul, repéré par ses coordonnées polaires (r,θ). Pour simplifier les calculs, on considère que le photon vient de l'infini depuis la direction $\theta = \pi/2$, se dirige vers la Terre, et arrive tangent à la Terre. On pose $\vec{OP}$ = r(θ) $\vec{e_r}$.

Pour établir l'équation de la trajectoire, nous supposerons dans un premier temps que le photon possède une masse m non nulle, mais nous constaterons par la suite que le résultat ne dépend pas de la masse. Le mouvement se faisant dans un champ de force centrale, il y a conservation du moment cinétique, et on pose $L = \left\|\vec{L}\right\| = mC$, où C est la constante dite des aires.

On rappelle la formule de Binet pour l'accélération, où u(θ) = 1/r(θ) :

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u\right] \vec{e_r}$$

Le photon est soumis à une force centrale qui se décompose en deux contributions. La première contribution est la force gravitationnelle newtonienne :

$$\vec{F_G} = -GmM_T u^2 \vec{e_r}$$

Et la deuxième est un terme correctif relativiste :

$$\vec{F_c} = -3\frac{GM_T L^2}{mc^2} u^4 \vec{e_r}$$

Selon le principe fondamental de la dynamique, $m\vec{a} = \vec{F_G} + \vec{F_c}$. Pour un moment cinétique L fixé, lorsque m tend vers 0, $\vec{F_G}$ devient négligeable devant $\vec{F_c}$. On a donc, pour m tendant vers 0 :

$$mC^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u\right] = 3\frac{GM_T L^2}{mc^2} u^4$$

Sachant que L = mC, on a donc l'équation du mouvement :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3\frac{GM_T}{c^2}u^2$$

On remarque que ce résultat ne dépend pas de la masse du corps (qui est malgré tout supposée petite) ! Cette équation s'applique donc parfaitement à un photon.

On introduit la variable sans dimension $Z = R_T u$, ce qui nous donne l'équation suivante (en posant $k = \frac{3GM_T}{c^2 R_T} \approx 2 \times 10^{-9}$) :

$$\frac{d^2Z}{d\theta^2} + Z = kZ^2$$

On cherche une solution approchée au premier ordre en k, sous la forme $Z(\theta) = \cos\theta + k \times [A + B\cos 2\theta]$. Au premier ordre en k, l'équation différentielle devient donc :

$$kA - 3kB\cos 2\theta = k\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Ce de quoi on tire A = 1/2 et B = -1/6.

Nous obtenons donc l'équation du mouvement du photon en polaire :

$$r(\theta) = \frac{R_T}{\cos\theta + k[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{6}]}$$

On appelle $x = r(\theta)\cos(\theta)$ et $y = r(\theta)sin(\theta)$, et on définit θ_0 tel que $r(\theta_0) = 3 \times 10^6$. La longueur de la courbe décrite par le photon est alors :

$$l = \int_0^{\theta_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Ce qui est à comparer à la longueur qu'aurait parcouru le photon en ligne droite :

$$l_0 = 3 \times 10^8 \times \sin(\theta_0)$$

Après application numérique à l'aide de Maple, on trouve une différence d'environ 5 mètres, donc environ 10 mètres pour un aller-retour.

4 Applications

Du fait de sa très grande précision, le Laser Lune possède de nombreux intérêts en physique fondamentale, notamment en tant qu'outil de vérification des modèles physiques.

C'est notamment le meilleur outil disponible pour vérifier le postulat d'égalité de la masse inertielle et de la masse gravitationnelle. Dans l'hypothèse où ces deux masses ne seraient pas égales, l'orbite de la Lune autour de la Terre serait légèrement modifiée par rapport au modèle classique. Les observations faites jusqu'ici n'ont pu que confirmer la validité du postulat, et l'on peut affirmer que s'il existe une différence entre masse inertielle et masse gravitationnelle, alors

$$\left|\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_L - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_T\right| \leq 10^{-13}$$

Il permet en outre de :
- Vérifier la validité des modèles décrivant le mouvement du système Terre-Lune
- Suivre la variation de la constante de gravitation G
- Mesurer les irrégularités dans la rotation de la Terre ainsi que les mouvements fins du sol lunaire (librations).
- Suivre la position de satellites artificiels avec précision, ce qui permet de déterminer le champ de gravité terrestre et de mesurer la forme de la Terre.

5 Conclusion

Les modèles que nous avons vus sont très simplifiés par rapport aux modèles utilisés en réalité. Il faut savoir que le modèle complet comporte plus d'une trentaine de paramètres correctifs à prendre en compte afin de minimiser l'erreur commise sur la mesure de distance. Il va de soi que par exemple les paramètres météorologiques sont ajustés au jour le jour, et non pas par un modèle global comme nous l'avons fait ici. Nous avons également négligé l'existence de turbulences atmosphériques, le mouvement relatif de la Terre et de la Lune... Mais ces modèles, même simplifiés ; permettent de rendre compte malgré tout de l'extrême sensibilité des mesures astronomiques aux moindres paramètres.

La précision atteinte actuellement pouvant aller jusqu'à 2 ou 3 mm sur la distance Terre-Lune est déjà excellente, mais il est déjà question de faire mieux ! Des améliorations du matériel sont en projet, et elles pourraient permettre d'obtenir une mesure d'une précision inférieure au millimètre... On n'arrête pas le progrès !

6 Bibliographie

- http ://wwwrc.obs-azur.fr/cerga/laser/laslune/llr.htm
- http ://www.engineeringtoolbox.com/standard-atmosphere-24_604.html
- Nicolas Pelloquin : "Etude des problèmes atmosphériques liés à la télémétrie Laser Lune"
- André Danjon : "Astronomie générale" (Chapitre IX : La réfraction astronomique)
- Sujet Physique II Ecole Polytechnique 1994, options M' et P'
- Sujet Physique II Mines-Ponts 2005, option MP
- John W. Marini : "Correction of satellite tracking data for an arbitrary tropospheric profile"

TIPE réalisé avec l'aide précieuse de M. Bertrand Chauvineau, astronome à l'Observatoire de la Côte d'Azur.

7 Illustrations